Załącznik 2a

Autoreferat

dr inż. Kajetana Marta Snopek

Zawartość

1. Imię i nazwisko

Kajetana Marta Snopek

2. Posiadane dyplomy i stopnie naukowe

a) **Doktor nauk technicznych** w zakresie Elektroniki – dyplom z wyróżnieniem
Politechnika Warszawska, Wydział Elektroniki i Technik Informacyjnych.
Tytuł rozprawy: „*Rozkłady klasy Cohena sygnałów wielowymiarowych i ich zastosowania*" (21 czerwca 2002 r.) [Sno2001a]
Promotor: prof. dr hab. inż. Stefan Hahn
Recenzenci: dr hab. inż. Jan Chojcan, prof. dr hab. inż. Jerzy Szabatin

b) **Magister inżynier** w zakresie Podstawowych Problemów Techniki, specjalność: matematyka stosowana – dyplom z wyróżnieniem
Politechnika Warszawska, Wydział Fizyki Technicznej i Matematyki Stosowanej.
Tytuł pracy: „*Testy zgodności*" (1 lipca 1991 r.)

3. Informacje o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych

2002-obecnie	Politechnika Warszawska, Wydział Elektroniki i Technik Informacyjnych, Instytut Radioelektroniki, *adiunkt*
1997-2002	Politechnika Warszawska, Wydział Elektroniki i Technik Informacyjnych, *doktorantka*
1991-1997	Politechnika Warszawska, Wydział Elektroniki i Technik Informacyjnych, Instytut Radioelektroniki, *starszy referent techniczny*

4. Wskazane osiągnięcia wynikające z art. 16 ust. 2 ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki (Dz. U. nr 65, poz. 595 ze zm.)

Jako osiągnięcie naukowe do oceny przedkładam własną monograficzną publikację książkową w języku angielskim pt:

„***Studies on Complex and Hypercomplex Multidimensional Analytic Signals***", Prace Naukowe serii Elektronika, z. 190, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2013, ISSN 0137-2343, ISBN 978-83-7814-143-3;

(169 stron, 28 tabel, 15 ilustracji czarno-białych i 28 ilustracji barwnych)

Recenzenci wydawniczy: prof. dr hab. inż. Bożena Kostek,
prof. dr hab. inż. Jerzy Szabatin.

Omówienie celu naukowego w.w. pracy i osiągniętych wyników

Celem naukowym prezentowanej monografii jest przedstawienie i porównanie metod zespolonej i hiperzespolonej analitycznej reprezentacji sygnałów rzeczywistych wielowymiarowych. Zespolone i hiperzespolone sygnały *n*-wymiarowe stanowią rozszerzenie na *n* wymiarów odpowiednich liczb zespolonych i hiperzespolonych. W monografii skoncentrowałam się na sygnałach hiperzespolonych stanowiących uogólnienie wybranych liczb należących do algebr Cayley'a-Dicksona oraz Clifforda. W spektrum zainteresowania znalazły się kwaterniony, oktoniony i sedeniony, tj. algebry Cayley'a-Dicksona rzędów 4, 8 i 16 odpowiednio nad ciałem liczb rzeczywistych. Spośród algebr Clifforda interesowały mnie dwie, tj. algebra bikwaternionów (8. rzędu) oraz bioktonionów (16. rzędu) stanowiące niejako odpowiedniki kwaternionów i oktonionów. W pracy wykorzystano związki pomiędzy teorią *n*-wymiarowych sygnałów analitycznych a systemami algebraicznymi Cayley'a-Dicksona i Clifforda. **Tematyka ta stanowiła przedmiot moich badań teoretycznych po uzyskaniu stopnia doktora nauk technicznych**.

Myślą przewodnią było pokazanie równoważności opisów sygnałów rzeczywistych *n*-wymiarowych w dziedzinie zespolonej i hiperzespolonej. Należy podkreślić, że tematyka niniejszej monografii jest *hermetyczna* i zajmuje się nią bardzo wąskie grono naukowców, z czym wiąże się stosunkowo mała liczba cytowań.

Podejście zespolone polega na zastąpieniu *n*-wymiarowego sygnału rzeczywistego sygnałem analitycznym *zespolonym* o widmie ograniczonym do jednego ortantu *n*-wymiarowej przestrzeni częstotliwościowej. Drugi sposób – to **podejście hiperzespolone**, bazujące na reprezentacji *n*-wymiarowego sygnału rzeczywistego w postaci sygnału *hiperzespolonego* o widmie jednoortantowym. Wykorzystałam tutaj analityczne sygnały hiperzespolone Cayley'a-Dicksona i Clifforda pokazując wzajemne relacje między podejściem zespolonym i hiperzespolonym, tak w dziedzinie zmiennych przestrzennych, jak i częstotliwościowych. Wszystkie definicje i formuły podałam dla sygnałów *n*-wymiarowych i rozpisałam szczegółowo dla przypadków *n*=1, 2 i 3 z uwagi na potencjalne zastosowania praktyczne.

W **rozdziale 1** opisałam zakres tematyczny i układ tekstu rozprawy, sporo miejsca poświęcając historii rozwoju teorii sygnałów zespolonych wielowymiarowych. Wymieniłam postacie naukowców, którzy przyczynili się do jej rozwoju. Dziedzina ta ciągle się rozwija, a pojawiające się zastosowania wskazują na jej duży potencjał.

W **rozdziale 2** przedstawiłam i zobrazowałam pojęcie ortantu dla przypadków *n*=1, 2, 3 oraz 4. Przy numeracji ortantów wykorzystałam konwencję zaproponowaną po raz pierwszy przez S. Hahna w artykule pt. „Multidimensional Complex Signals with Single-Orthant Spectra" (Proceedings of the IEEE, 1992). Jest ona odmienna od konwencji stosowanej powszechnie przez matematyków. Według niej wszystkie ortanty półprzestrzeni f_1>0 są indeksowane kolejnymi liczbami nieparzystymi, co jest wygodne przy definiowaniu sygnałów *n*-wymiarowych rzędu mniejszego niż *n* (p. Rozdział 8.4). Warto nadmienić, że numery ortantów zapisane w odwróconym porządku binarnym określają kierunek półosi f_i i tak: symbol 0 oznacza f_i>0, natomiast 1 - f_i<0. Podałam również formy *n*-wymiarowego operatora $\mathbf{1}(\boldsymbol{f})$ dla wszystkich ortantów (*n*=1 2, 3, 4), co stanowiło rozszerzenie w stosunku do poprzednich publikacji na ten temat. Operator ten wykorzystałam następnie w definicji częstotliwościowej wielowymiarowego zespolonego i hiperzespolonego sygnału analitycznego (p. Rozdział 8.3 monografii). Ponieważ *n*-wymiarowe widmo sygnału rzeczywistego pomnożone przez operator $\mathbf{1}(\boldsymbol{f})$ jest jednoortantowe, więc odwrotne przekształcenie Fouriera (zespolone lub hiperzespolone) definiuje *n*-wymiarowy sygnał analityczny (zespolony lub hiperzespolony).

Analiza własności algebraicznych liczb hiperzespolonych Cayley'a-Dicksona i Clifforda została przedstawiona kolejno w **rozdziałach 3** i **4**. Wykorzystałam tutaj wiedzę zaczerpniętą z literatury, którą wzbogaciłam o dowody wybranych własności operacji na kwaternionach, takich jak dodawanie, odwracalność, sprzężenie, mnożenie oraz własności normy. Skonstruowałam tablice mnożenia jednostek urojonych w algebrach Cayley'a-Dicksona kwaternionów, oktonionów oraz sedenionów, przy czym korzystałam z praw działań, takich jak nieprzemienność mnożenia, łączność mnożenia w algebrze kwaternionów oraz alternatywność mnożenia oktonionów. Przebadałam również właściwości mnożenia jednostek urojonych w algebrach Clifforda bikwaternionów i bioktonionów i zaobserwowałam pewne reguły, których dowody zamieściłam w podrozdziale 4.2. W algebrze bioktonionów, której bazę stanowi $\{1, e_1, e_2, e_{12}, e_3, e_{13}, e_{23}, e_{123}, e_4, e_{14}, e_{24}, e_{34}, e_{124}, e_{134}, e_{234}, e_{1234} = \boldsymbol{\omega}\}$, można zauważyć tak relacje przemienności, jak i nieprzemienności mnożenia poszczególnych jednostek urojonych. Mając na uwadze brak przemienności oraz łączność mnożenia elementów e_1, e_2, e_3 i e_4, wyprowadziłam reguły mnożenia pozostałych elementów bazy. Na tej podstawie skonstruowałam tablice mnożenia jednostek urojonych w algebrach Clifforda, które stosowałam w kolejnych rozdziałach pracy.

Przedstawiłam również liczne zastosowania praktyczne liczb i sygnałów hiperzespolonych z ostatnich lat. Potwierdziło to **aktualność tematyki monografii w kontekście obecnych i przyszłych aplikacji**. Najwięcej zastosowań znajdują kwaterniony, które wykorzystuje się między innymi w przetwarzaniu obrazów kolorowych, automatyce, robotyce i nawigacji, jak również fizyce matematycznej. Kwaternionowe przekształcenie Fouriera jest ważnym narzędziem wykorzystywanym w analizie częstotliwościowej obrazów, między innymi w dziedzinie znakowania wodnego oraz filtracji. Oktoniony i sedeniony są używane głównie w dziedzinie fizyki matematycznej w obszarach elektromagnetyzmu, teorii grawitacji oraz fizyki kwantowej. Również i bikwaterniony znajdują w ostatnich latach liczne zastosowania praktyczne w dziedzinie fizyki matematycznej, robotyki oraz w sieciach nauronowych. Ich potencjał wykorzystuje się również w przetwarzaniu obrazów kolorowych oraz projektowaniu banków filtrów hiperzespolonych. Przekształcenie Clifforda-Fouriera stanowi alternatywę dla kwaternionowego przekształcenia Fouriera dla sygnałów 2-wymiarowych. Z powodzeniem wykorzystywane jest również w analizie częstotliwościowej sygnałów 3-wymiarowych.

Szczególną uwagę poświęciłam normom liczb hiperzespolonych, które, jak zauważyłam, tylko w algebrach Cayley'a-Dicksona są całkowicie zgodne z normą euklidesową. Ma to konsekwencje w definiowaniu energii sygnału hiperzespolonego Cayley'a-Dicksona jako kwadratu normy tego sygnału (p. **rozdział 5**). W pracy zinterpretowałam moduł liczby hiperzespolonej należącej do algebry Clifforda jako tzw. semi-normę.

Analiza częstotliwościowa sygnałów analitycznych wielowymiarowych odbywa się z wykorzystaniem zespolonego lub hiperzespolonego n-wymiarowego przekształcenia Fouriera. W analogii do przypadku 1-wymiarowego, sygnał analityczny wielowymiarowy posiada widmo ograniczone do jednego ortantu n-wymiarowej przestrzeni częstotliwościowej, przy czym pojęcie to oznacza ściśle określony wycinek tej przestrzeni. **Bardzo ważną część monografii** stanowi **rozdział 6**, w którym przedstawiłam definicje n-wymiarowego zespolonego i hiperzespolonego przekształcenia Fouriera. W drugim przypadku rozważałam znane hiperzespolone przekształcenie fourierowskie oparte na algebrze Clifforda (tzw. transformacja Clifforda-Fouriera) oraz przekształcenie bazujące na algebrze Cayley'a-Dicksona (nazwane przeze mnie transformacją Cayley'a-Dicksona-Fouriera). Przekształcenie Cayley'a-Dicksona-Fouriera zostało zdefiniowane w [Sno2009], a następnie wykorzystane w [Sno2011, SnoH2011, Sno2012, Sno2013,] w analizie sygnałów analitycznych kwaternionowych i oktonionowych. W przypadkach n=2, 3 jest ono powiązane z zespolonym przekształceniem Fouriera formułami, których dowody zamieściłam w monografii. **Potwierdzają one tezę pracy o równoważności opisów sygnałów wielowymiarowych w dziedzinie zespolonej i hiperzespolonej.** Rozdział ten zawiera również **nowe treści**, mianowicie przedstawienie 2– i 3–wymiarowych hiperzespolonych transformat Fouriera jako sum odpowiednio czterech i ośmiu składowych częstotliwościowych różniących się parzystością. Pokazałam użyteczność takiej reprezentacji między innymi w dowodzie formuły wiążącej oktonionową transformatę Fouriera z 3-wymiarowym zespolonym widmem fourierowskim sygnału rzeczywistego. W osobnym podrozdziale omówiłam znaną własność symetrii zespolonego i kwaternionowego przekształcenia Fouriera. Symetria hermitowska 2-wymiarowego zespolonego przekształcenia Fouriera pozwala stwierdzić, że cała informacja o sygnale 2-wymiarowym zawarta jest w półpłaszczyźnie częstotliwości dodatnich f_1>0 składającej się z dwóch kwadrantów (o numerach 1 i 3) i w konsekwencji taki sygnał jest reprezentowany przez dwa sygnały zespolone analityczne o widmach jednokwadrantowych (p. Rozdział 8 monografii). Z kolei symetria kwaternionowego przekształcenia Fouriera pozwala zdefiniować widma w poszczególnych kwadrantach jako tzw. inwolucje widma ograniczonego do kwadrantu pierwszego. W rezultacie sygnał rzeczywisty 2-wymiarowy jest reprezentowany w dziedzinie hiperzespolonej przez sygnał kwaternionowy o widmie w kwadrancie 1. W przypadku sygnału rzeczywistego 3-wymiarowego istnieją również dwie całkowicie równoważne reprezentacje: z użyciem czterech sygnałów analitycznych zespolonych o widmach w oktantach 1, 3, 5 i 7 oraz sygnału oktonionowego zdefiniowanego jako odwrotna oktonionowa transformata Fouriera 3-wymiarowego widma o nośniku w oktancie 1 (p. podrozdział 8.3).

W **rozdziale 7** przedstawiłam teorię n-wymiarowego przekształcenia Hilberta. W pierwszej kolejności przypomniałam znane własności 1-wymiarowego przekształcenia Hilberta. Następnie przeanalizowałam szczegółowo przypadki n= 2 oraz 3, dla których wyprowadziłam postaci pełnej i cząstkowych transformat Hilberta rzędów n-1 jako sumy składowych o różnej parzystości. Teorię tę zobrazowałam przekrojami tych składowych dla 2-wymiarowego separowalnego sygnału Cauchy'ego.

W **rozdziale 8** rozważałam sygnały analityczne jako szczególny przypadek wielowymiarowych sygnałów zespolonych i hiperzespolonych zdefiniowanych w rozdziale 5. Przedstawiłam ich definicje w dziedzinie n-wymiarowej zmiennej przestrzennej $\boldsymbol{x}$ (p. podrozdział 8.2). Sygnały analityczne mają postać n-krotnego splotu sygnału rzeczywistego $u(\boldsymbol{x})$ z n-wymiarową zespoloną lub hiperzespoloną dystrybucją delta. Pojęcie n-wymiarowej hiperzespolonej dystrybucji delta zostało zdefiniowane już wcześniej w [Sno2009], a tutaj przedstawiłam wszystkie postacie tej dystrybucji dla poszczególnych ortantów przestrzeni 2-, 3- i 4-wymiarowej. W tym celu wykorzystałam skonstruowane wcześniej tablice mnożenia jednostek urojonych w algebrach Cayley'a-Dicksona oraz Clifforda. W analogiczny sposób wyprowadziłam odpowiednie postacie n-wymiarowej zespolonej dystrybucji delta. Pozwoliło mi to zdefiniować wszystkie możliwe sygnały analityczne zespolone i hiperzespolone dla przypadków n=1, 2, 3. Interesowały mnie sygnały hiperzespolone bazujące na algebrach Cayley'a-Dicksona kwaternionów i oktonionów oraz algebrach Clifforda bikwaternionów i bioktonionów. Pokazałam, że **w obu podejściach w definicjach sygnałów analitycznych występują te same funkcje jako składowe urojone**. Są to mianowicie n-wymiarowe transformaty Hilberta różniące się rzędem, których teorię przedstawia rozdział 7. I tak, w definicji 2-wymiarowego sygnału analitycznego występują pełna $v(x_1, x_2)$ i dwie cząstkowe $v_1(x_1, x_2)$ i $v_2(x_1, x_2)$ transformaty Hilberta. Z kolei, sygnał analityczny 3-wymiarowy ma składowe: $v(x_1, x_2, x_3)$ – pełną transformatę Hilberta, $v_1(x_1, x_2, x_3)$, $v_2(x_1, x_2, x_3)$, $v_3(x_1, x_2, x_3)$ – trzy cząstkowe transformaty Hilberta 1. rzędu oraz $v_{12}(x_1, x_2, x_3)$, $v_{13}(x_1, x_2, x_3)$, $v_{23}(x_1, x_2, x_3)$ – trzy cząstkowe transformaty Hilberta 2. rzędu. Teorię tę zilustrowałam w pracy wykresami poszczególnych składowych dla 2-wymiarowego separowalnego i nieseparowalnego sygnału Cauchy'ego uzyskanymi z wykorzystaniem samodzielnie opracowanych programów w środowisku Matlab. Zaprezentowane w postaci rzutów na płaszczyznę (x_1, x_2) wykresy pozwoliły uchwycić pewne charakterystyczne cechy sygnału. Zaobserwowałam „skręcenie" składowych sygnału związane z jego nieseparowalnością.

Podrozdział 8.4 został poświęcony *sygnałom analitycznym wielowymiarowym niższego rzędu* (ang. rank). Sygnały takie definiuje się jako średnią arytmetyczną dwóch sygnałów o widmach w ortantach mających wspólną płaszczyznę czy hiperpłaszczyznę. I tak, w przestrzeni 2-wymiarowej sygnał analityczny niższego rzędu równego 1 powstaje jako średnia arytmetyczna dwóch sygnałów o widmach jednokwadrantowych, na przykład sygnałów o widmach w ćwiartkach 1 i 3. Pokazałam, że w wyniku takiego uśrednienia powstaje sygnał o nośniku widmowym w półpłaszczyźnie $f_1>0$ mający identyczną postać niezależnie od tego, czy bazujemy na sygnałach zespolonych czy kwaternionowych. W przestrzeni 3-wymiarowej takie uśrednienie można przeprowadzać w dwóch etapach, rozszerzając nośnik częstotliwościowy sygnału najpierw do kwadrantu przestrzennego, a następnie do półprzestrzeni $f_1>0$. W rozprawie wyprowadziłam wszystkie formy 2-, 3- i 4-wymiarowych sygnałów analitycznych zespolonych i hiperzespolonych niższego rzędu i pokazałam, że w każdym przypadku sygnał o rzędzie równym 1 ma identyczną postać. Jest to sygnał postaci $u+v_1e_1$, gdzie u jest sygnałem rzeczywistym (odpowiednio 2-, 3- i 4-wymiarowym), a v_1 jego transformatą Hilberta rzędu 1.

W kolejnym **rozdziale 9** rozważałam problem reprezentacji polarnej 2- i 3-wymiarowych sygnałów analitycznych w postaci składowych amplitudowo-fazowych. Jak wspomniano wcześniej, sygnał rzeczywisty 2-wymiarowy jest reprezentowany przez dwa sygnały analityczne o widmach w kwadrantach 1 i 3 lub, równoważnie, przez sygnał kwaternionowy o widmie w kwadrancie 1. W konsekwencji ma on zawsze cztery składowe polarne: 2 amplitudy lokalne i 2 fazy lokalne w przypadku zespolonym oraz 1 amplitudę i 3 kąty fazowe w przypadku hiperzespolonym. Podałam formuły umożliwiające rekonstrukcję sygnału rzeczywistego oraz jego transformat Hilberta ze składowych polarnych zespolonych sygnałów analitycznych. Prawdziwość wzorów teoretycznych zweryfikowałam eksperymentalnie w drodze symulacji komputerowych w środowisku Matlab dla 2-wymiarowego separowalnego i nieseparowalnego sygnału gaussowskiego. Przeanalizowałam również postać polarną sygnału kwaternionowego stanowiącego alternatywną i równoważną reprezentację sygnału rzeczywistego 2-wymiarowego oraz przytoczyłam wzory wiążące obie reprezentacje, które zostały wyprowadzone wcześniej w [HahS2004]. Tak, jak w przypadku zespolonym, zamieściłam formuły rekonstrukcyjne sygnału rzeczywistego oraz jego transformat Hilberta. Tak w przypadku zespolonym, jak i hiperzespolonym, sygnał rzeczywisty 2-wymiarowy został odtworzony idealnie z dokładnością do błędów reprezentacji zmiennoprzecinkowej.

W tym samym rozdziale przedstawiłam również stan wiedzy na temat reprezentacji polarnej sygnałów rzeczywistych 3-wymiarowych, przy czym oparłam się tutaj o teorię 3-wymiarowych analitycznych sygnałów zespolonych o widmie jednooktantowym opisaną między innymi w monografii S. Hahna „*Hilbert Transforms In Signal Processing*" oraz podejście hiperzespolone zaprezentowane w [SnoH2011]. Teorię sygnałów analitycznych zespolonych uzupełniłam o postaci składowych amplitudowo-fazowych dla sygnałów analitycznych o widmach w pozostałych oktantach. Wyprowadziłam wzory rekonstrukcyjne dla sygnału rzeczywistego 3-wymiarowego i jego transformat Hilberta 1. oraz 2. rzędu, przy czym interesował mnie również przypadek sygnałów separowalnych, dla których wzory te znacznie się upraszczają. Przedstawiłam także hipotezę dotyczącą reprezentacji polarnej sygnału oktonionowego postawioną w [SnoH2011]. Zakłada ona przedstawienie sygnału oktonionowego obejmujące jedną amplitudę lokalną (przestrzenną) oraz 7 kątów fazowych. W tym przypadku możliwa jest rekonstrukcja sygnału rzeczywistego 3-wymiarowego. Prawdziwość postawionej hipotezy była weryfikowana dla 3-wymiarowego sygnału gaussowskiego w drodze symulacji komputerowych. Otrzymane wyniki pozwalają stwierdzić, że formuła ta jest poprawna, jednakże jeszcze nie udowodniono jej na drodze analitycznej. W tym obszarze wyniki należy traktować jako punkt wyjścia do dalszych analiz teoretycznych.

Ostatni **rozdział 10** poświęcony został rozkładowi Wignera i funkcji nieoznaczoności Woodwarda 2-wymiarowych sygnałów analitycznych zespolonych i kwaternionowych, która to tematyka została zapoczątkowana w [Sno2001, HahS2002a,b] i kontynuowana w [HahS2005, Sno2005]. Wymienione rozkłady przestrzenno-częstoliwościowe stanowią 4-wymiarowe reprezentacje 2-wymiarowych sygnałów analitycznych, których zobrazowanie polega na obserwacji 2-wymiarowych przekrojów przy ustalonych zmiennych przestrzennych, częstotliwościowych bądź mieszanych. Przedstawiłam najważniejsze wyniki teoretyczne wymienionych powyżej prac i zobrazowałam je wybranymi przekrojami rozkładu Wignera i funkcji nieoznaczoności Woodwarda 2-wymiarowego sygnału separowalnego Cauchy'ego oraz 2-wymiarowego zmodulowanego sygnału pasmowego o obwiedni gaussowskiej. W podrozdziale 10.3 krótko opisałam ideę rozkładów podwójnie wymiarowych zdefiniowanych w [HahS2005]. W kolejnych publikacjach na ten temat tematyka ta była rozwijana [Sno2005] i poszukiwano też zastosowań praktycznych w znakowaniu wodnym sygnałów dźwiękowych [Sno2008].

Najważniejsze wyniki niniejszej monografii to:

a) powiązanie teorii wielowymiarowych analitycznych sygnałów zespolonych i hiperzespolonych z teorią algebr Cayley'a-Dicksona i Clifforda wyższych rzędów, w szczególności ujednolicenie notacji w rozważanych algebrach i uogólnienie problemu na *n* wymiarów; w tym sensie praca ta może służyć jako **kompendium aktualnej wiedzy**;

b) uporządkowanie teorii wybranych systemów algebraicznych w kontekście teorii zespolonych i hiperzespolonych sygnałów wielowymiarowych, w szczególności **skonstruowanie tablic mnożenia** w tych algebrach;

c) uwypuklenie podobieństw i różnic między algebrami Cayley'a-Dicksona oraz algebrami Clifforda bikwaternionów i bioktonionów;

d) wskazanie obszarów najnowszych zastosowań praktycznych systemów algebraicznych Cayley'a-Dicksona i Clifforda oraz analitycznych sygnałów wielowymiarowych, co stanowić może dowód na **aktualność poruszanej tematyki**;

e) podsumowanie i **rozwinięcie wiedzy na temat** zespolonych i hiperzespolonych sygnałów wielowymiarowych ze szczególnym uwypukleniem **sygnałów analitycznych**, w tym:
   - podanie definicji przestrzennych sygnałów analitycznych jako splotu z wielowymiarową zespoloną i hiperzespoloną dystrybucją delta (w rozprawie wyprowadzono definicje dla wszystkich ortantów przestrzeni 2-, 3- i 4-wymiarowej, co stanowi rozwinięcie w stosunku do wcześniejszych prac),
   - podanie definicji częstotliwościowych sygnałów analitycznych w dziedzinie zespolonej i hiperzespolonej, która bazuje na pojęciu jednoortantowości widma,
   - podanie definicji rozkładów przestrzenno-częstotliwościowych (rozkład Wignera, funkcja niejednoznaczności Woodwarda) sygnałów analitycznych w dziedzinie zespolonej i hiperzespolonej (w rozprawie przytoczono wyniki opublikowane wcześniej w pracy doktorskiej i w publikacjach po doktoracie),
   - przedstawienie postaci polarnych sygnałów analitycznych wielowymiarowych w dziedzinie zespolonej i hiperzespolonej,
   - podanie definicji sygnału analitycznego niższego rzędu jako średniej arytmetycznej dwóch sygnałów o widmach w sąsiednich ortantach o wspólnej hiperpłaszczyźnie;

f) pokazanie **równoważności opisów sygnałów analitycznych wielowymiarowych w dziedzinie zespolonej i hiperzespolonej**, w szczególności:
   - wyprowadzenie postaci sygnałów analitycznych w dziedzinie zespolonej i hiperzespolonej i pokazanie, że w obu definicjach występują składowe w formie pełnej i cząstkowych transformat Hilberta niższych rzędów,
   - wyprowadzenie i udowodnienie formuły wiążącej Oktonionową Transformatę Fouriera sygnału 3-wymiarowego z jego widmem zespolonym,
   - pokazanie, że postać polarna sygnałów analitycznych wielowymiarowych, zarówno w dziedzinie zespolonej jak i hiperzespolonej, obejmuje identyczną liczbę składowych amplitudowo-fazowych,
   - wyprowadzenie wzorów wiążących składowe amplitudowo-fazowe sygnału 2-wymiarowego w dziedzinie zespolonej z ich odpowiednikami w dziedzinie kwaternionowej,
   - przedstawienie hipotezy o postaci polarnej sygnału oktonionowego i jej weryfikacja eksperymentalna,
   - wyprowadzenie wzorów pozwalających na rekonstrukcję sygnału rzeczywistego 2- i 3-wymiarowego z postaci polarnej w dziedzinie zespolonej i hiperzespolonej i ich weryfikacja eksperymentalna dla wybranych sygnałów testowych,

g) wytyczenie **obszarów potencjalnych zastosowań praktycznych przedstawionej teorii oraz określenie dziedzin, w których analizy teoretyczne mogą być kontynuowane**.

5. Omówienie pozostałych osiągnięć naukowo-badawczych

Zakres moich badań teoretycznych obejmuje cztery główne obszary:

a) **teoria i zastosowania wielowymiarowych zespolonych i hiperzespolonych sygnałów analitycznych** (szczegółowo przedstawione w pkt. 4)

b) **teoria i zastosowania wielowymiarowych rozkładów przestrzenno-częstotliwościowych klasy Cohena**

Tematyka została zapoczątkowana w trakcie studiów doktoranckich i kontynuowana po uzyskaniu tytułu doktora nauk technicznych. Lata 1997-2002 to okres studiów doktoranckich i badań teoretycznych nad rozkładami czas-częstotliwość i ich rozwinięciem dla sygnałów n-wymiarowych, czyli $2n$-wymiarowymi rozkładami przestrzenno-częstotliwościowymi. Najważniejsze uzyskane wyniki zostały przedstawione w rozprawie doktorskiej [Sno2001a]. Ważnym osiągnięciem tej pracy było zdefiniowanie wielowymiarowej funkcji niejednoznaczności oraz zbadanie jej niektórych własności, również w powiązaniu z wielowymiarowym rozkładem Wignera oraz zdefiniowanie wielowymiarowej klasy Cohena w postaci całki $3n$-krotnej. Z postaci tej zostały wyprowadzone cztery równoważne formy wielowymiarowej klasy Cohena nazwane *częstotliwościowo-przestrzenną*, *przestrzenno-przestrzenną*, *przestrzenno-częstotliwościową* oraz *częstotliwościowo-częstotliwościową.* Na ten okres przypadają badania dotyczące zastosowania opracowanej teorii w analizie obrazów monochromatycznych wykorzystujące metodę animacji komputerowej w zastosowaniu do obserwacji kolejnych przekrojów funkcji czterowymiarowych.

c) **teoria i zastosowania rozkładów podwójnie wymiarowych**

W rozprawie doktorskiej przedstawiłam ideę tych rozkładów, a badania w tym zakresie były kontynuowane w ramach zespołowego projektu naukowo-badawczego finansowanego przez Komitet Badań Naukowych (p. Załącznik 4, pkt. IB), co zaowocowało współautorską publikacją w *IEEE Transactions on Signal Processing* [HahS2002a]. W latach 2002-2008 kontynuowałam badania teoretyczne w tej dziedzinie [Sno2005a] i badałam możliwości wykorzystania **rozkładów podwójnie wymiarowych** w znakowaniu wodnym sygnałów dźwiękowych [Sno2008].

d) **teoria wielowymiarowych sygnałów quasi-analitycznych**

Aktualnie prowadzę badania teoretyczne w dziedzinie wielowymiarowych sygnałów quasi-analitycznych o widmie ograniczonym do jednego ortantu przestrzennego z niewielkim przeciekiem do sąsiednich ortantów. Najnowsze wyniki tych prac zostały zawarte we współautorskiej publikacji w *Biuletynie Polskiej Akademii Nauk* [HahS2013a].

Bibliografia

[HahS2002a] Hahn S.L., Snopek K.M., "The Comparison of selected Cohen's class double-dimensional distributions", *Kleinheubacher Berichte*, Band 45, 2002, 111-115.

[HahS2002b] Hahn S.L., Snopek K.M., "The Double-dimensional Distributions. Another Approach to "Quartic"Distributions", *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 50, No.12, December 2002, 2987-2997.

[HahS2004] Hahn S.L., Snopek K.M., "Comparison of Properties of Analytic, Quaternionic and Monogenic 2-D Signals," *WSEAS Transactions on Computers*, Issue 3, Vol. 3, pp. 602-611, July 2004.

[HahS2005] Hahn S.L., Snopek K.M. "Wigner Distributions and Ambiguity Functions of 2-D Quaternionic and Monogenic Signals," *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 53, No. 8, August 2005, 3111-3128.

[HahS2013a] Hahn S.L., Snopek K.M., "Quasi-analytic Multidimensional Signals," *Bull. Polish Ac. Sci., Tech. Sci.*, No. 4, 2013 (w druku).

[Sno2001a] Snopek K.M. "Rozkłady klasy Cohena sygnałów wielowymiarowych i ich zastosowania", Rozprawa doktorska, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2001, 121 stron.

[Sno2005] Snopek K.M., "Pseudo-Wigner and double-dimensional pseudo-Wigner distributions with extension for 2-D signals", *Kwartalnik Elektroniki i Telekomunikacji*, Tom 51, Zeszyt Specjalny, Warszawa 2005, 9-21.

[Sno2008] Snopek K.M., "Badanie możliwości wykorzystania sygnałów "chirp" i rozkładów podwójnie wymiarowych w znakowaniu wodnym sygnałów audio," *Przegląd Telekomunikacyjny i Wiadomości Telekomunikacyjne*, Zeszyt 4, 2008, 205-208.

[Sno2009] Snopek K.M., "New Hypercomplex Analytic Signals and Fourier Transforms in Cayley-Dickson Algebras," *Kwartalnik Elektroniki i Telekomunikacji*, Tom 55, No. 3, 2009,403-415.

[Sno2011] Snopek K.M., "The n-D Analytic Signals and Fourier Spectra in Complex and Hypercomplex Domains," 34th Int. Conf. on Telecommunications and Signal Processing, Budapest 18-20 August 2011, Proceedings, 2011, 423-427.

[SnoH2011] Snopek K.M., Hahn S.L., "The Unified Theory of n-Dimensional Complex and Hypercomplex Analytic Signals," *Bull. Polish Ac. Sci., Tech. Sci.*, Vol. 59, No. 2, 2011, 167-181.

[Sno2012] Snopek K.M., "The Study of Properties of n-D Analytic Signals and Their Spectra in Complex and Hypercomplex Domains," *Radioengineering*, Vol. 21, No. 1, April 2012, 29-36.

[Sno2013] Snopek K.M., "Wybrane aspekty teorii i zastosowań analitycznych sygnałów hiperzespolonych," XIV Seminarium Stypendystów Fundacji Wspierania Rozwoju Radiokomunikacji i Technik Multimedialnych, Warszawa 4 grudnia 2013 r., ISBN 978-83-933558-2-2, pp. 21-34.

Kajetana Snopek